Metalógica II

1. Nombre del curso: Metalógica II

2. Programa de Postgrado al que pertenece el curso: Ciencias Cognoscitivas

3. Profesor que imparte el curso: Max Freund

4. Ciclo lectivo: primer semestre del 2018.

5. Número de créditos: 3

6. Horario del curso:

7. Justificación:

El curso es una continuación del curso *Metalógica*. En este se demostró la completud, la validez y la consistencia de los sistemas formales de la lógica proposicional así como de la lógica de primer orden. Los teoremas de compacidad y los de Löwenheim-Skolem también fueron estudiados en el mismo curso. A partir de estos resultados se procederá en el curso de Metalogíca II. Aquí se introducirán conceptos no vistos en el primer curso y se probará nuevos teoremas esenciales en metalógica y metamatemática, esto es, teoremas esenciales sobre las propiedades y características de los sistemas formales de lógica y de matemática. Así, se estudiará el concepto de computabilidad intuitiva y las diversas teorías formales de computabilidad (tales como computabilidad Turing, lambda computabilidad o recursividad). Se discutirá la tesis de Church sobre la relación de estos diversos sentidos formales con el sentido intuitivo de computabilidad. Se probará los teoremas de Gödel de la incompletud y consistencia de la aritmética, la indecidibilidad de la lógica de primer orden y la indefinibilidad del concepto de verdad en la aritmética. Se mostrará la existencia de modelos no estándar de la aritmética. Finalmente, se estudiara la aritmética de segundo orden así como las limitaciones de la lógica de segundo orden estándar.

Varios de los teoremas que se probarán en el curso y otros que se probaron en el curso Metalógica tienen implicaciones importantes para la Filosofía. Por ejemplo, los teoremas de Gödel ha sido usados para mostrar que la mente humana no puede ser un programa computacional. Si esto está en lo correcto, la llamada teoría funcionalista de la mente carecería de fundamento. Los mismos teoremas han sido usados para cuestionar las posturas formalistas y realistas con respecto a la ontología y epistemología de las matemáticas así como la posibilidad de construir una teoría del universo que abarcara todos sus aspectos. Otro ejemplo es el teorema de Löwenheim-Skolem, el cual puede ser usado en contra de las posturas metafísicas realistas.

Si el tiempo lo permite, discutiremos algunas de las implicaciones filosofícas de los resultados vistos en clase.

Requisito: Metalógica

Objetivo General: presentar y probar los teoremas limitativos de los sistemas formales de primer orden

Objetivos específicos :

(1) Formulación y demostración de los teoremas limitativos relativos a la computabilidad en general

(2) Formulación y demostración del teorema de Tarski de la indefinibilidad de la verdad matemática de primer orden

(3) Formulación y demostración de los teoremas de Gödel de los sistemas formales de matemática de primer orden. La proyección de estos teoremas a la teoría axiomática de conjuntos

(4) Formulación y demostración del teorema de la indecidibilidad de la lógica de primer orden

(5) Formulación y demostración del teorema de la incompletud de la lógica de segundo orden

Temas del curso

Nociones básicas

1. Computabilidad intuitiva
2. Máquinas de Turing,
3. Máquinas de Abaco
4. Funciones recursivas
5. Decidibilidad y recursividad
6. Definibilidad aritmética
7. Aritmetización de la sintaxis
8. Sistemas formales de segundo orden
9. Semántica de segundo orden
10. Completud de los sistemas formales de matemática de primer orden

Metodología: el curso se impartirá de forma magistral

Cronograma

1. Introducción general al curso *Semana 1*

2. Computabilidad intuitiva y computabilidad Turing *Semanas 2-3*
3. Abaco-computabilidad *Semana 4*
4. Funciones recursivas primitivas y generales, conjuntos y relaciones recursivas *Semanas 5-7*
5. Demostración de la equivalencia de las diversas definiciones formales de computabilidad y la tesis de Church *Semana 8*
6. Aritmetización de las sintaxis, números de Gödel y representación de funciones recursivas *Semanas 9-11*
7. El lemma de la diagonal y los teoremas limitativos (teorema de Gödel de incompletud, teorema de Tarski de la indefinibilidad de la verdad de la aritmética, teorema de la indecidibilidad de la aritmética y teorema de Church de la no recursividad de la lógica de primer orden) *Semanas 12-14*
8. Imposibilidad de probar la consistencia de la aritmética y de la teoría axiomática de conjuntos *Semana 15*
9. Categoricidad y modelos non-estandar de la aritmética *Semana 16*

<u>Evaluación</u>: se basará en la resolución de ejercicios para llevar a la casa (30% de nota final) y participación en clase (20% de la nota final) y examen final (50%).

<u>Bibliografía obligatoria</u>

1) Boolos, G. et Al., *Computability and Logic*, Cambridge U. Press.2003
2) Enderton, H. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 2000.
3) Smullyan, Raymond, *Gödel´s Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, 1992.
4) Ladriere, J., *Limitaciones internas de los formalismos*, Editorial Tecnos, Madrid, 1969

<u>Bibliografía complementaria</u>:

1) Kleene, S. , *Introduction to Metamathematics*, Ishi Press, 2009
2) Rogers, H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, MIT Press, 1987.
3) Raymond Smullyan, Recursion Theory for Metamathematics, Oxford U. P., 1993.
4) Davis, M.. *Computability and Unsolvability*, Dover,1985.